

T.C.  
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

KÜÇÜK KOMÜTATÖRLERDEN ORTAK İNVARYANT  
ALTUZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İliyana GARGARİDİ  
1302010016

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri  
Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ

OCAK 2021

T.C.  
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

KÜÇÜK KOMÜTATÖRLERDEN ORTAK İNVARYANT  
ALTUZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İliyana GARGARİDİ  
1302010016

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri  
Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ  
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR  
Prof. Dr. Faruk POLAT (ÇAKÜ)

OCAK 2021

# ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışmasının konusunu öneren danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ'ye ve tüm Matematik ve Bilgisayar Bilimleri bölümü hocalarına teşekkür ederim.



# İÇİNDEKİLER

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| ÖNSÖZ .....                            | ii |
| ÖZET .....                             | iv |
| ABSTRACT .....                         | v  |
| 1 GİRİŞ .....                          | 1  |
| 2 ÖN BİLGİLER .....                    | 3  |
| 3 SIFIR KOMÜTATÖRLER VE ÖRNEKLER ..... | 7  |
| 4 RANK-BİR KOMÜTATÖRLER .....          | 15 |
| KAYNAKÇA .....                         | 23 |

Üniversitesi : İstanbul Kültür Üniversitesi

Enstitüsü : Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Anabilim Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Programı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ

Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans - Ocak 2021

## ÖZET

### KÜÇÜK KOMÜTATÖRLERDEN ORTAK İNVARİYANT ALTUZAYLAR

İliyana GARGARİDİ

$\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$ ,  $n \times n$ 'lik kompleks matris cebirleri öyle ki her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $[A, B] = AB - BA$  komütatörü “*küçük*” olmak üzere  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  cebirlerinin ortak aşıkâr olmayan invaryant altuzayı var mı? Bu soru “*neredeyse-komütatif*” cebirler ve daha genel olarak yarı-grupların yapısını çalışan bazı makalelerden motive edilmiştir. Basit bir örnekle sorunun cevabının hayır olduğunu görülebilir:  $\mathcal{B}$  cebiri  $\mathcal{A}$  cebirinin  $\mathcal{A}'$  komütantına eşit ise bu iki cebir bir invaryant altuzay paylaşmaz. Böyle bütün cebirleri karakterize ederiz:  $\mathcal{A}$  matris cebiri komütantı ile ortak invaryant altuzay sahip değilse bir tam matris cebirinin genişlemesine benzerdir. Böylece her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  ve bunlar içinden bire ulaşan varsa  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  cebirlerinin ortak invaryant altuzayı varlığını gösteririz. Ayrıca,  $[A, B]$ 'nin nilpotent olmasının yanı sıra matris lineer uzayları hakkında bazı kısmi sonuç tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matris cebiri, Komütatör, Rank, İnvaryant Alt-Uzay

University : İstanbul Kültür University

Institute : Institute of Graduate Education

Science Programme : Mathematics and Computer Science

Programme : Mathematics and Computer Science

Supervisor : Assist.Prof.Dr. Uğur GÖNÜLLÜ

Degree Awarded and Date : M.S. - January 2021

## ABSTRACT

### COMMON INVARIANT SUBSPACES FROM SMALL COMUTATORS

İliyana GARGARİDİ

Suppose that  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are two algebras of complex  $n \times n$  matrices such that the ring commutator  $[A, B] = AB - BA$  is “small” for each  $A \in \mathcal{A}$  and  $B \in \mathcal{B}$ ; does this imply that  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  have common non-trivial invariant subspace? This question is motivated by a series of papers studying the structure of “almost-commutative” algebras and, more generally, semigroups. A simple example shows that, in general, the answer is no: it may happen that the algebra  $\mathcal{B}$  is equal to the commutator  $\mathcal{A}'$  of  $\mathcal{A}$  and the two algebras do not share an invariant subspace. We characterize all such algebras: if a matrix algebra  $\mathcal{A}$  does not share invariant subspaces with commutant, then it must be similar to an amplification of a full matrix algebra. Then, we show that if  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are two algebras such that  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  for all  $A \in \mathcal{A}$  and  $B \in \mathcal{B}$  and the rank-one is achieved, then  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  have a common invariant subspaces. A number of partial results about linear spaces of matrices, as well as the condition that  $[A, B]$  is always nilpotent, are also discussed.

**Keywords:** Matrix algebra, Commutator, Rank, Invariant Subspace

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Matris topluluklarının üçgenleştirilebilmesi literatürde kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. Bunun iyi bilinen bir örneği şu klasik sonuştır:  $n \times n$ 'lik matrislerin her komütatif topluluğu üçgenleştirilebilirdir [22, Teorem 1.1.5]. Bazı durumlarda matris topluluğunun üçgenleştirilmesi komütatıflığı gerektirdiği ortaya çıkmaktadır. Örneğin McCoy'un iyi bilinen klasik bir sonucu:  $n \times n$ 'lik kompleks matrislerin yarı-basit cebirleri üçgenleştirilebilir gerek ve yeter koşul komütatif olmasıdır [17].

Laffey teoremi her  $A, B \in \mathcal{A}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  olacak şekilde her  $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{C})$  cebirinin üçgenleştirilebilir olması gerektiğini göstermek için kullanılabilir. Bu ifade Guralnick [8] tarafından önemli bir ölçüde genelleştirilmiştir; eğer  $S$ ,  $n \times n$ 'lik matrislerin yarı-grubu öyle ki her  $B, C \in S$  için  $[B, C]$  komütatörü nilpotent ise,  $S$  üçgenleştirilebilir olur (rankı bir olan her  $[A, B]$  komütatörü nilpotenttir).

Bu sonuçlar sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirme konusu olmuştur. Örneğin [21, Sonuç 2] 'de gösterildiği gibi  $S$ , bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı Schatten  $p$ -sınıfı operatörlerin bir yarı-grubu ve her  $A, B \in S$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  ise  $S$  üçgenleştirilebilirdir. Bu ifade keyfi Banach uzayları üzerinde tanımlı kompakt operatörlere genelleştirildi [22, Teorem 9.2.10]. Kompakt olmayan operatörler için de bu soru çalışıldı. Aynı sonucun cebirsel operatörlerin yarı-grupları için sağlandığının [4, Lemma 5] ve her  $A, B \in S$  için  $\text{rank}[AB - BA] \leq 1$  koşuluna sahip komütatif olmayan doubly üretilmiş  $S$  yarı-grubunun hiperinvariant altuzaya sahip ([6]) olduğunun gösterildiği not edilmelidir. Son olarak  $X$ , en az iki boyutlu bir Banach uzayı ve  $S$ ,  $X$  uzayı üzerinde tanımlı operatörlerin komütatif olmayan bir yarı-grubu ise, her  $A, B \in S$  için  $\text{rank}[AB - BA] \leq 1$  olmasının  $S$  yarı-grubunu indirgenebi-

lir olmasını gerektirdiği Drnovšek tarafından gösterdi [7]. Ayrıca, her  $A, B \in S$  için  $\text{rank}[AB - BA] \leq 2$  koşulu [10]'de incelendi.

Eldeki bu Yüksek Lisans tez çalışmasında A. Jafarian, A. I. Popov ve H. Radjavi'nin [10] "Common Invariant Subspaces from Small Commutators", başlıklı makalesi detaylı olarak incelenmiştir. Sözü edilen makalede kısaca, şu genel soru göz önüne alınmıştır: iki cebir veya daha genel olarak  $n \times n$ 'lik kompleks matrislerden oluşan iki küme  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G}$  verilsin öyle ki  $F \in \mathcal{F}$  ve  $G \in \mathcal{G}$  için  $[F, G] = FG - GF$  komütatörü bir anlamda "küçük" olsun. O halde  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G}$  ortak değişmez altuzaya sahip veya üçgenleştirilebilir mi? Bu sorunun motivasyonlarından biri Laffey'in iyi bilinen sonucudur [22, Teorem 1.3.6]:  $A$  ve  $B$  iki matris öyle ki  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  ise  $\{A, B\}$  üçgenleştirilebilirdir. Diğer taraftan [10]'da her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $[A, B]$  komütatörlerinin küçük olan (özel belirli bir anlamda)  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  cebirleri incelenmiştir. Bu yönde ilk sonuçlardan biri Szép'e aittir [25] ve şunu ispatlamıştır; eşgüçlü (idempotent)  $P$  ve  $Q$  matrisleri için  $\{P, Q\}$  kümesinin üçgenleştirilebilir olması yalnız ve yalnız  $PQ - QP$  komütatörünün nilpotent olması ile sağlanır (bakınız [22, Teorem 2.3.10] ve [23]). [18], [19], ve [20]'da ilgili çalışmalar ele alınmıştır.

Eldeki çalışmanın ikinci bölümünde kullanılacak olan temel kavramlar ve tanımlar verilmiş, üçüncü bölümde  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  her ikisi de bir tek normal matrisler tarafından üretilen cebirler olmak üzere her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $[A, B]$  nilpotent ise birlikte köşegenleştirilebilir olduğu gözlemlenmiş, ve buradan  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  cebirlerinin ortak aşıkâr olmayan invaryant altuzay sahip olmaları veya birlikte-üçgenleştirilebilir olması için bazı yeter şartlar elde edilmiştir. Genel olarak,  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  matris cebirleri olmak üzere her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $[A, B]$  komütatörlerinin küçüklüğü  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  cebirlerinin ortak invaryant altuzaya sahip olmaları için yeterli değildir. Buna basit bir örnek olarak  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$  ve  $\mathcal{B} = \{aI | a \in \mathbb{C}\}$  verilebilir, ayrıca daha genel bir tanesi Örnek 3.3'te gösterilmiştir. Bu bölümün ana sonucu olarak komütantı  $\mathcal{A}'$  ile ortak invaryant altuzaya sahip olmayan tüm  $\mathcal{A}$  cebirleri karakterize edilmiş, ve buna Burnside teoreminin bir genelleştirilmesi olarak bakılabilir. Dördüncü bölümde, Örnek 3.3'e karşıt olarak  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  olduğunda  $[A, B]$  komütatörlerinin rankları en fazla bir ve bunlar içinden bire ulaşan varsa  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  ortak aşıkâr olmayan invaryant altuzaya sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu sonucun bazı genellemeleri verilmiştir.



# BÖLÜM 2

## ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir. Bu çalışma boyunca söz edilen tüm cebir ve vektör uzayları kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlıdır. Aynı şekilde tüm matris girdilerinin kompleks olduğu varsayılmıştır.  $n \times n$  boyutlu tüm matrislerin cebiri  $M_n(\mathbb{C})$  ile gösterilir, ve bunun herhangi bir alt cebirine *matris cebiri* olarak bahsedilmiştir ve  $M_k(\mathbb{C})$  formundaki bir cebir *tam (full) matris cebiri* olarak isimlendirilmiştir.  $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{C})$  matris cebirinin *komutanti*  $\mathcal{A}'$  ile gösterilir:

$$\mathcal{A}' = \{T \in M_n(\mathbb{C}) \mid AT = TA \ (\forall A \in \mathcal{A})\}.$$

$\mathcal{A} \subseteq M_k(\mathbb{C})$  bir matris cebiri olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan  $\mathcal{A}^{(j)}$  cebirine  $\mathcal{A}$  matrisinin  $j$ . *genişlemesi* denir:

$$\mathcal{A}^{(j)} = \left\{ \begin{bmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{bmatrix} \in M_{kj}(\mathbb{C}) \mid A \in \mathcal{A} \right\},$$

$\mathcal{A}^{(j)} \subseteq M_{kj}(\mathbb{C})$  cebiri blok köşegenleri  $\mathcal{A}$  cebirinin elemanı olan blokların  $j$  defa tekrar etmesiyle oluşan blok-köşegen matrislerden meydana gelmektedir.

**Tanım 2.1.**  $A$  kare matris olsun.

- (i)  $A^r = 0$  olacak şekilde bir  $r$  pozitif tamsayısı var ise  $A$  matrisine *nilpotent* denir (veya denk olarak  $A$  matrisinin tez özdeğeri sıfırdır.)
- (ii)  $A = A^*$  koşulu sağlanıyor ise  $A$  matrisine *kendine eş* matris (self adjoint) denir.
- (iii)  $AA^* = A^*A$  ise  $A$  matrisine *normal* matris denir.

(iv) Eşlenik transpozu  $A^*$  aynı zamanda  $A$  matrisinin tersi ise  $A$  matrisine *birincil* (unitary) matris denir. ( $AA^* = A^*A = \mathcal{I}$ )

**Teorem 2.2.** [1, Theorem 7.9] Her normal matris köşegenleştirilebilirdir.

**Sonuç 2.3.** Eğer  $A$  nilpotent ve normal ise  $A = 0$  olmalıdır.

**Tanım 2.4.**  $\mathcal{M}$ ,  $V$  vektör uzayının bir altuzayı ve  $A$ ,  $V$  üzerinde tanımlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her  $x \in \mathcal{M}$  için  $Ax \in \mathcal{M}$  sağlanıyorsa  $\mathcal{M}$  altuzayı  $A$  altında *invariant* veya *A-invariant* denir. Bu altuzay eğer  $\{0\}$  uzayı ve tüm uzaydan farklı ise aşıkâr olmayan denir.  $V$  vektör uzayının  $A$ -invariant olan bütün altuzaylarının topluluğu  $\text{Lat}(A)$  ile gösterilir.

$\mathcal{C}$ ,  $V$  üzerinde tanımlı lineer dönüşümlerin bir topluluğu olmak üzere her  $A \in \mathcal{C}$  için  $\mathcal{M}$  altuzayı  $A$ -invariant ise  $\mathcal{M}$  altuzayı  $\mathcal{C}$  için invariant denir. Eğer bir lineer dönüşümlerin topluluğu aşıkâr olmayan invariant altuzaya sahip ise *indirgenebilir* (reducible), değilse *indirgenemez* (irreducible) denir.  $\mathcal{C}$  indirgenemez bir cebir ise *geçişli* (transitive) denir.

Aksi belirtilmedikçe,  $n \times n$ 'lik matrislerden oluşan bir  $S$  kümesi için bahsedilen invariant altuzay terimi aşıkâr olmayan invariant altuzay anlamına gelmektedir, yani bir  $X \subseteq \mathbb{C}^n$  uzayı öyle ki  $SX \subseteq X$  ve  $X \neq 0, \mathbb{C}^n$  olur.

**Teorem 2.5.** (Burnside Teoremi)[22, Teorem 1.2.2] İndirgenemez tek  $n \times n$ 'lik kompleks matris cebiri,  $M_n(\mathbb{C})$  tam matris cebiridir.

**Tanım 2.6.** [22, Tanım 1.1.2] Eğer lineer dönüşümlerin bir topluluğu için vektör uzayının bir tabanı var öyle ki topluluktaki tüm dönüşümlerin bu tabana göre temsili bir üst üçgensel matris ise bu topluluğa *üçgenleştirilebilir* denir.

$S$ , operatörlerin veya matrislerin bir kümesi olmak üzere her biri  $S$ -invariant olan altuzayların bir maksimal zinciri varsa  $S$  kümesine üçgenleştirilebilir denir. Bir üçgenleştirmeyi elde etmenin yöntemi  $S$ -invariant altuzay bulmak ve bu işlemi devam ettirmektir.

**Teorem 2.7.** [22, Lemma 1.1.5] Lineer dönüşümlerin her komütatif topluluğu üçgenleştirilebilirdir.

**Sonuç 2.8.** (Schur Lemması)[22, Lemma 1.1.6] Her lineer dönüşüm üçgenleştirilebilirdir.

$\mathcal{V}$  üzerinde tanımlı tüm lineer dönüşümlerin cebiri  $\mathcal{B}(\mathcal{V})$  ile gösterilsin.

**Teorem 2.9.** (McCoy Teoremi) [22, Teorem 1.3.4]  $\{A, B\}$  çifti ancak ve ancak her komütatif olmayan  $p$  polinomu için  $p(A, B)(AB - BA)$  nilpotent ise üçgenleştirilebilir.

**Teorem 2.10.** (Laffey Teoremi) [22, Teorem 1.3.6] Eğer  $AB - BA$  rank bire sahip ise  $\{A, B\}$  üçgenleştirilebilir.

**Tanım 2.11.** Eğer  $a, b \in A$  için  $\bullet$  işlemi kapalı ve asosyatif ise  $\langle A, \bullet \rangle$  bir *yarı-grup*ur denir.

**Tanım 2.12.** Bir  $\mathcal{A}$  cebirinin *radikali* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{Rad } \mathcal{A} := \{A \in \mathcal{A} : \sigma(AB) \subseteq \{0\}, \text{ her } B \in \mathcal{A}\}.$$

Eğer birimli bir cebirin radikali  $\{0\}$  ise *yarı-basit* denir.

**Teorem 2.13.** [22, Lemma 1.4.6]  $\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{V})$  cebirinin birimli bir alt-cebiri ise  $\mathcal{A}$  cebirinin üçgenleştirilebilir olması ancak ve ancak  $\mathcal{A}/\text{Rad } \mathcal{A}$  bölüm uzayının komütatif olmasıyla mümkündür.

**Sonuç 2.14.**  $\mathcal{B}(\mathcal{V})$  cebirinin yarı-basit bir alt-cebiri üçgenleştirilebilir gerek ve yeter koşul onun komütatif olmasıdır.

**Tanım 2.15.**  $A$  ve  $B$  iki matris öyle ki  $A = N^{-1}BN$  olacak şekilde bir terslenebilir  $N$  matrisi varsa  $A$  ve  $B$  matrislerine *benzer* (similar) denir.

**Tanım 2.16.**  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$  olsun.  $\mathcal{V}$  vektör uzayının bir tabanına göre  $T$  operatörünün matris temsili blok köşegen matris;

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

öyle ki her bir  $A_j$  matrisi aşağıdaki formda ise bu tabana  $T$  için bir *Jordan tabanı* denir.

$$A_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Yukarıdaki tanımda her bir  $A_j$  matrisindeki köşegenler  $T$  operatörünün en az bir  $\lambda_j$  özdeğerinden oluşmaktadır.

**Teorem 2.17.** [1, Theorem 8.47]  $\mathcal{V}$  bir kompleks vektör uzayı olmak üzere her  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$  için  $\mathcal{V}$  vektör uzayının  $T$  için bir Jordan tabanı vardır.

**Teorem 2.18.** [1, Proposition 6.46]  $\mathcal{V}$  ve  $\mathcal{W}$  sonlu boyutlu iç-çarpım uzayları ve  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (i)  $\text{Ker}(T^*) = \text{Ran}(T)^\perp$ ;
- (ii)  $\text{Ran}(T^*) = \text{Ker}(T)^\perp$ ;
- (iii)  $\text{Ker}(T) = \text{Ran}(T^*)^\perp$ ;
- (iv)  $\text{Ran}(T) = \text{Ker}(T^*)^\perp$ ;
- (v)  $\mathcal{M} \in \text{Lat}(T) \iff \mathcal{M}^\perp \in \text{Lat}(T^*)$ .

## BÖLÜM 3

### SIFIR KOMÜTATÖRLER VE ÖRNEKLER

Bu bölümün temel sonucu bölüm sonundaki Teorem 3.5 dir. İlk olarak bazı ön hazırlıklar ile başlayalım.  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  iki cebir öyle ki her bir  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $[A, B]$  komütatörü “küçük” olsun. Bu komütatör için makul küçüklük ölçümleri var olabilir. Bu bölüme bütün komütatörlerin nilpotent olduğu durumla ilgili gözlemlerle başlayacağız.

Eğer  $A$  ve  $B$  kendine-eş (self-adjoint)  $n \times n$  boyutunda matrisler öyle ki  $[A, B]$  nilpotent ise  $AB - BA$  normal matris olduğundan Sonuç 2.3 göre  $AB = BA$  olur. Özellikle  $A$  ve  $B$  matrisleri sadece birlikte-üçgenleştirmeye (simultaneous triangularization) sahip değil, aynı zamanda birlikte-köşegenleştirmeye sahiptir. Eğer kendine-eşlik yerine normallik alınırsa artık bu sonucun doğru olmayacağı muhtemelen beklenmediktir.

**Örnek 3.1.**  $n$  bir asal sayı olsun ve  $i = 1, \dots, n$  için  $|\alpha_i| = 1$  olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

olsun. Açıkça görülür ki  $A$  ve  $B$  birimcil (unitary) matrislerdir.  $\alpha_i$  parametrelerinin hepsi eşit olmadığı sürece bu iki matris değişmeli değil, dahası ortak invaryant altuzaya bile sahip değildirler ([22, Lemma 4.2.8 ]). Yine de en az bir  $i$  için  $\alpha_i = \alpha_{i+1}$  veya  $\alpha_1 = \alpha_n$  ise  $[A, B]$  nilpotenttir.

Yukarıdaki gözlemi normal matrislere genişletmek için  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  sırasıyla  $A$  ve  $B$  tarafından doğrulan cebirleri göstermek üzere her  $T \in \mathcal{A}$  ve  $S \in \mathcal{B}$  matrisleri için komütatörlerin nilpotent olması gerektiğine ihtiyaç duyulmaktadır.

**Önerme 3.2.**  $A$  ve  $B$  iki normal matris olmak üzere  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  sırasıyla  $A$  ve  $B$  tarafından doğrulan cebirler olsun. Eğer her  $T \in \mathcal{A}$  ve  $S \in \mathcal{B}$  için  $[T, S]$  nilpotent ise  $AB = BA$  olur.

*Kanıt.* Bir  $N$  normal matrisin her spektral projeksiyonu  $N$  matrisinin bir polinomdur [9, Corollary, sayfa 336]. Bu nedenle  $E$ ,  $A$  için bir spektral projeksiyon ve  $F$ ,  $B$  için bir spektral projeksiyon ise  $[E, F]$  nilpotenttir. Ayrıca yukarıdaki Örnek 3.1'den önce bahsedildiği gibi  $E$  ve  $F$  değişmelidir. Her normal matris spektral projeksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan sonuç elde edilir.  $\square$

Şuna dikkat edilmelidir ki Önerme 3.2'deki  $A$  ve  $B$  matrisleri tarafından üretilen cebirler yerine yarı-grupları göz önüne almak, Örnek 3.1'den dolayı, sonuca ulaşmaya yetmez.

Önerme 3.2 bir soru ortaya çıkarır:  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  iki cebir öyle ki her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $[A, B]$  nilpotent olsun.  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  cebirlerinin bir ortak aşıkır olmayan invaryant altuzaya sahip oldukları doğru mudur? Bir sonraki örnek, genel olarak, bunun cevabının hayır olduğunu gösterir hatta her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $[A, B] = 0$  koşulu bile ortak invaryant altuzaya sahip olmaları için yeterli değildir.

**Örnek 3.3.**  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \mid A \in M_n(\mathbb{C}) \right\} \subseteq M_{2n}(\mathbb{C})$$

olsun.  $I$ ,  $n \times n$  boyutlu birim matrisi göstermek üzere

$$\mathcal{A}' = \left\{ \begin{bmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

eşitliği sağlanır ([24, Lemma 7.4]).  $\mathcal{M} \in \text{Lat}(\mathcal{A})$  ve  $\mathcal{M} \neq \{0\}$ ,  $\mathbb{C}^{2n}$  olsun. Bu durumda

$$\mathcal{M} = \{(\mu x, \lambda x) \mid x \in \mathbb{C}^n\}$$

olacak şekilde aynı anda sıfır olmayan  $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$  vardır. Eğer

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{A}' \quad \text{ve} \quad y = \begin{bmatrix} \mu x \\ \lambda x \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$$

ise

$$By = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu a + \lambda b)x \\ (\mu c + \lambda d)x \end{bmatrix}$$

bulunur ki bu her zaman  $\mathcal{M}$  altuzayına ait değildir. Örneğin  $a = c = 1$  ve  $b = d = 0$  için

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alınırsa, o halde  $x \neq 0$  için

$$By = \begin{bmatrix} \mu x \\ \mu x \end{bmatrix} \notin \mathcal{M}$$

olur. Buradan  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{A}'$  cebirlerinin ortak aşıkâr olmayan invaryant altuzaya sahip olmadıkları görülür.

Bu bölümün ana sonucunu vermeden önce aşağıdaki lemmayı vereceğiz.

**Lemma 3.4.** Herhangi bir  $X \in M_n(\mathbb{C})$  için

$$\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$2n \times 2n$  boyutlu matrisler birbirinin tersidir.

Aşağıdaki sonuca Burnside Teoreminin bir genelleştirilmesi olarak bakılabilir.

**Teorem 3.5.**  $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{C})$  bir cebir öyle ki  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{A}'$  ortak invaryant altuzaya sahip olmasın. O halde  $\mathcal{A}$ , tam matris cebirinin bir genişlemesine (amplification) benzerdir. Yani,  $km = n$  olacak şekilde  $k, m$  doğal sayıları vardır öyle ki  $\mathcal{A}$ ,  $M_k(\mathbb{C})^{(m)}$  cebirine benzerdir.

*Kanıt.*  $\mathcal{A}$  cebirinin birimli olduğunu varsayabiliriz. Eğer  $\mathcal{A}$  birimli değil ise o halde

$$\mathcal{A}_1 = \{A + \lambda I \mid A \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

birimli cebirini göz önüne alalım. Bu durumda  $\mathcal{A}_1$  teoremin varsayımlarını sağlar. Eğer  $\mathcal{A}_1, M_k(\mathbb{C})$  matris cebirinin bir genişlemesine benzer ise, o zaman  $\mathcal{A}$  kendiliğinde birimli olur, yani  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$  eşitliği sağlanır.

Eğer  $\mathcal{A}$  invariant altuzaya sahip değil ise Burnside Teoreminden  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$  bulunur. O halde  $\mathcal{A}$ 'nın aşikar olmayan invariant altuzayları olduğunu varsayalım.

$\mathcal{M}$  bir maksimal öz  $\mathcal{A}$ -invariant altuzay olsun. Yani,  $0 \neq \mathcal{M} \neq \mathbb{C}^n$  bir  $\mathcal{A}$ -invariant altuzay ve başka bir öz  $\mathcal{A}$ -invariant altuzay tarafından kapsanamaz.

$\mathbb{C}^n = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$  ayrışımına göre her bir  $T \in \mathcal{A}$  matrisi

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ 0 & C_T \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir ( $A_T, B_T, C_T$  yerine  $A, B, C$  kullanılacaktır). Dikkat edilmediler ki  $\mathcal{M}$  maksimal  $\mathcal{A}$ -invariant altuzay olduğundan  $\mathcal{A}_0 := \{C_T | T \in \mathcal{A}\}$  cebiri geçişli ve dolayısıyla Burnside Teoreminden  $k = n - \dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{M}^\perp$  olmak üzere  $M_k(\mathbb{C})$  matris cebirine eşittir. ( $\mathcal{A}_0$  cebirinin sıfıra eşit olmaması  $\mathcal{A}$  cebirinin birimli olmasından kaynaklanır).

Keyfi bir  $S \in \mathcal{A}'$  alalım ve  $S = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & V \end{bmatrix}$  olarak yazılsın. O halde

$$TS = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BV \\ CZ & CV \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad ST = \begin{bmatrix} XA & XB + YC \\ ZA & ZB + VC \end{bmatrix}$$

elde edilir. Varsayımımızdan  $\mathcal{M}, \mathcal{A}'$ -invariant olmadığından  $S$  matrisini  $Z \neq 0$  olacak şekilde seçebiliriz.  $TS$  ve  $ST$  matrislerinin (2,1)-bloklarını karşılaştırsak  $CZ = ZA$  eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik bize  $CZ$  matrisinin görüntüsünün  $Z$  matrisinin görüntüsü tarafından kapsadığını gösterir. Ayrıca,  $Z \neq 0$  ve  $\mathcal{A}_0 = M_k(\mathbb{C})$  olduğundan  $Z$  matrisinin örten olması gerekir. Özel olarak bu  $k \leq n - k$  olmasını gerektirir.

$\mathcal{A}$  cebirine blok-köşegen benzerlik (block-diagonal similarity) uygulanarak, eğer gerekli ise,  $Z = [0 \ I]$  olduğunu varsayabiliriz (sıfır bulunmayabilir). Buradaki  $I, k \times k$  boyutlu birim matris ve  $0, k \times (n - 2k)$  boyutlu sıfır matrisidir. O halde bu ayrışımına göre

$$T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_3 & A_4 & B_2 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad S = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & Y_1 \\ X_3 & X_4 & Y_2 \\ 0 & I & V \end{bmatrix}$$



yazılabilir.  $CZ = ZA$  koşulu  $A_3 = 0$  ve  $A_4 = C$  olmasını gerektirir öyle ki

$$T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ 0 & C & B_2 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

olur (burada sıfırdan farklı tüm bloklar  $T$  matrisine bağlıdır. Sıfır bloklar bütün  $T \in \mathcal{A}$  için aynıdır).  $\mathcal{A}'$  cebirinin herhangi bir  $S'$  elemanı

$$S' = \begin{bmatrix} X'_1 & X'_2 & Y'_1 \\ X'_3 & X'_4 & Y'_2 \\ Z'_1 & Z'_2 & V' \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Varsayımımızdan,  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{A}'$  tarafından üretilen cebir geçişli olduğundan Burnside Teoremine göre  $M_n(\mathbb{C})$  tam matris cebirine eşit olmak zorundadır. Kolay görülür ki bu cebirin herhangi bir elemanı  $T \in \mathcal{A}$  ve  $S' \in \mathcal{A}'$  olmak üzere  $TS'$  formundaki elemanların toplamı şeklinde yazılabilir. Ayrıca,  $\mathcal{M} \in \text{Lat}(A)$  olduğundan bir  $S' \in \mathcal{A}'$  matrisi vardır öyle ki (3,1)-bloğundaki  $Z'_1$  sıfırdan farklıdır.  $TS'$  ve  $S'T$  matrislerinin (3,1)-blokları karşılaştırılırsa, keşit olmaları gerekir, yani

$$CZ'_1 = Z'_1A_1$$

sonucuna ulaşılır. Tekrar  $C$ ,  $\mathcal{A}_0 = M_k(\mathbb{C})$  cebirinin keyfi bir elemanı olabileceğinden,  $Z'_1$  matrisi örten olmak zorundadır. Tıpkı önceki gibi  $\mathcal{A}$  cebirindeki matrislerin (2,2)-ve (3,3)-bloklarını değiştirmeyen blok-köşegen benzerliği uygulayarak  $Z'_1$  matrisinin  $Z'_1 = [0 \ I]$  gibi ayrıştığını varsayabiliriz. Buradan

$$A_1 = \begin{bmatrix} A'_1 & A''_1 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

elde edilir. Tümevarımla bu işleme devam edilirse, her  $T \in \mathcal{A}$  matrisinin her bir blok satırda ve sütunda  $m = n/k$  blok olan  $k \times k$  bloklu blok-üst üçgensel (block-upper triangular) ve köşegen bloklarının hepsinin eşit olduğu görülür. Bu da her  $T \in \mathcal{A}$  matrisinin

$$T = \begin{bmatrix} C & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & C & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix}$$

formunda olduğunu gösterir ve buradaki bütün sıfırdan farklı olan bloklar  $T$  matrisine bağlıdır.  $\mathcal{A}'$  cebirinin keyfi bir  $R$  elemanı için

$$R = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & \dots & X_{mm} \end{bmatrix}$$

yazılsın.

Yukarıda tümevarımsal kurulumdan,  $\mathcal{A}'$  cebirinde  $R_1, R_2, \dots, R_{m-1}$  matrisleri vardır öyle ki  $R_j$  matrisinin  $m$ . satır bloğu (en alt satır) aşağıdaki formdadır:

$$[0 \dots 0 \quad I \quad X_{m,j+1} \dots X_{mm}] \quad (2.1).$$

Burada  $R_j$  matrisinin en alt satırındaki ilk  $j - 1$  tane blok sıfıra eşit ve  $j$ . blok  $k \times k$  boyutlu  $I$  birim matrise eşittir.

[14, Sonuç 30]'a göre (bakınız [14, Tanım 25, Sonuç 28]) altta yatan uzayın altuzaylara ayrılışını değiştirmeyen bir blok üst üçgensel benzerlik uygulayarak  $\mathcal{A}$  cebirinin aşağıdaki gibi bir direkt toplam olduğu görülür,

$$\mathcal{A} = S \dot{+} \text{Rad}(\mathcal{A}),$$

burada  $S$ , blok-köşegen matrislerden oluşan bir yarı-basit cebir ve  $\text{Rad}(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A}$  cebirinin tüm kesin üst üçgensel elemanlarından oluşan cebirdir. Bu benzerlikten dolayı  $\mathcal{A}$  cebirinin  $T = [T_{ij}]$  elemanının köşegen blokları artık aynı değildir. Ancak, uyguladığımız benzerlik şu özelliğe sahiptir:  $\mathcal{A}$  cebirindeki matrislerin köşegen blokları sıfırdır ya da sıfırdan farklıdır, ve her köşegen blok  $M_k(\mathbb{C})$  cebirindeki tüm değerleri alır. Buradan  $i, j \in 1, \dots, m$  için  $\phi_{ij} : M_k(\mathbb{C}) \rightarrow M_k(\mathbb{C})$ ;  $\phi_{ij}(T_{ii}) = T_{jj}$  şeklinde tanımlanan fonksiyonun bir cebir homomorfizması olduğu görülür ve böylece bir benzerlik uygulanmalıdır ([24, Teorem 7.9]). Dolayısıyla, gerekli ise,  $\mathcal{A}$  cebirine bir köşegen benzerlik uygulayarak,  $\mathcal{A}$  cebirindeki herhangi bir  $T$  matrisinin köşegen bloklarının aynı olduğunu varsayabiliriz.

Bu gözlemler  $S = (M_k(\mathbb{C}))^{(m)}$  olmasını gerektirir (burada  $(M_k(\mathbb{C}))^{(m)}$ ,  $M_k(\mathbb{C})$  tam matris cebirinin  $m$ -genişlemesini göstermektedir). Eğer  $\text{Rad}(\mathcal{A}) = 0$  olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanacaktır.

Açıktır ki,  $S$  yarı-basit cebirinin komütantı  $S'$ ,  $\mathcal{A}'$  komütantını içerir. Bu nedenle [24, Lemma 7.4]'ü kullanarak her  $R \in \mathcal{A}'$  matrisinin aşağıdaki formda olacağını

görürüz:

$$R = \begin{bmatrix} X_{11}I & \dots & X_{1m}I \\ \vdots & & \vdots \\ X_{m1}I & \dots & X_{mm}I \end{bmatrix}.$$

Diğer bir değişle  $\mathcal{A}'$  cebirindeki her matris skaler bloklara sahiptir.

$\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^k)^{m-1} \oplus \mathbb{C}^k$  ayrışımına göre  $\text{Rad}(\mathcal{A})$  cebirinin her  $T$  elemanı aşağıdaki formda yazılabilir:

$$T = \begin{bmatrix} B & Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Şimdi daha önce (2.1) özelliğinde tanımladığımız gibi  $R_j$  matrislerini düşünelim.  $\mathcal{A}$  cebirine benzerliği uygulandıktan sonra, (2.1) özelliği şu şartı gerektirir: eğer  $R_1, R_2, \dots, R_{m-1}$  matrislerinin son satırlarındaki ilk  $m-1$  tane blok,

$$\begin{array}{cccc} a_{11}I & \dots & a_{1,m-1}I & (\text{her } R_1 \text{ için}) \\ a_{21}I & \dots & a_{2,m-1}I & (\text{her } R_2 \text{ için}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1}I & \dots & a_{m-1,m-1}I & (\text{her } R_{m-1} \text{ için}) \end{array}$$

şeklinde yazılırsa  $m-1$  dikey ve  $m-1$  yatay blok ile tanımlanan matris terslenebilir, çünkü uyguladığımız benzerlik blok üst üçgenseldir. Bu matrisi  $M$  ile gösterelim. Her  $T \in \text{Rad}(\mathcal{A})$  için  $R_j T = T R_j$  olduğundan, bir hesaplama ile  $MQ = 0$  olduğu gösterilebilir. Bu nedenle  $Q = 0$ , ve  $\text{Rad}(\mathcal{A})$  cebirinin her elemanı

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

formundadır.  $\mathcal{B} = \{B | B, \text{Rad}(\mathcal{A}) \text{ içerisindeki bir matrisin } (1,1) \text{ bloğudur}\}$  olsun.

$$\mathcal{A} = M_k(\mathbb{C})^{(m)} + \text{Rad}(\mathcal{A})$$

olduğunu biliyoruz.  $\mathcal{A}$  cebirinin (1.1) bloğuna kısıtlanması aşağıdaki cebirdir:

$$\mathcal{A}_0 = M_k(\mathbb{C})^{(m-1)} + \mathcal{B}.$$

$\mathcal{A}_0$  cebiri komütantı ile birlikte ortak bir invaryant altuzay sahip değildir. Gerçekten  $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}'_0$  ortak invaryant altuzaya sahip olsaydı, bir benzerlikten sonra,  $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}'_0$  tarafından doğrulan cebirdeki bütün matrislerin sabit bir  $(i, j)$  konumunda sıfıra sahip

olmaları gerekirdi. O halde  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  tarafından doğrulan cebirdeki matrislerin aynı konumda sifıra sahip olmaları gerekirdi. Bu ise imkansızdır, çünkü o zaman  $j$ . taban vektör tarafından doğrulan  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ -invariant altuzay  $i$ . taban vektöre dik ve bundan dolayı  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  invariant altuzaya sahip olurdu. Bu ise varsayımlarla çelişir.

Teoremin ispatı tümevarım argümanı ile biter. □



## BÖLÜM 4

### RANK-BİR KOMÜTATÖRLER

Bu bölümde  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  cebirlerindeki sırasıyla her  $A$  ve  $B$  elemanları için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  koşulunu çok daha detaylı çalışacağız. Bu koşulun  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  cebirleri için ortak invariant altuzayın varlığını garantilemek için yeterli olmadığı Örnek 3.3’de gösterildi. Bu bölümün temel sonucu olan Teorem 4.8 şunu belirtmektedir:  $[A, B]$  komütatörü her zaman sıfır değil ise bu rank koşulu yeterli bir koşul olur.

Ana teoreme gelmeden bazı ön sonuçlara bakacağız. [3] de gösterildiği gibi ilk Lemma Laffey Teoreminin ispatının bir kısmından oluştuğunu gözlemleyelim ([22, Teorem 1.3.6]).

**Lemma 4.1.**  $n \times n$  boyutlu  $A$  ve  $B$  iki matris öyle ki  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  olsun.  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $A$  matrisinin bir özdeğeri olsun. Eğer  $\mathcal{N} = \text{Ker}(\lambda I - A)$  ve  $\mathcal{M} = \text{Ran}(\lambda I - A)$  ise  $\mathcal{N}$  ya da  $\mathcal{M}$  altuzayları  $B$ -invarianttır.

Aşağıdaki önermede eğer bir  $A$  matrisi sabitlenir ve matrislerden oluşan bir  $\mathcal{L}$  altuzayındaki her  $B$  matrisi için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  koşulu sağlanırsa  $A$  matrisinin her özdeğeri bir ortak  $\mathcal{L} \cup \{A\}$ -invariant altuzayın varlığına neden olur.

**Önerme 4.2.**  $\mathcal{L} \subseteq M_n(\mathbb{C})$  matrislerin bir lineer uzayı ve  $A \in M_n(\mathbb{C})$  öyle ki her  $B \in \mathcal{L}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  olsun.  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $A$  matrisinin bir özdeğeri olsun. Eğer  $\mathcal{N} = \text{Ker}(\lambda I - A)$  ve  $\mathcal{M} = \text{Ran}(\lambda I - A)$  ise ya  $\mathcal{N}$  ya da  $\mathcal{M}$  altuzayları bir ortak  $\mathcal{L} \cup \{A\}$ -invariant altuzaydır.

*Kanıt.* Açıktır ki hem  $\mathcal{N}$  hem de  $\mathcal{M}$  altuzayları  $A$ -invariant olur. Eğer  $B \in \mathcal{L}$  ise Lemma 4.1 kullanılarak  $\mathcal{N} \in \text{Lat}(B)$  ya da  $\mathcal{M} \in \text{Lat}(B)$  bulunur. Şimdi,  $\mathcal{N} \in \text{Lat}(\mathcal{L})$  ya da  $\mathcal{M} \in \text{Lat}(\mathcal{L})$  olduğunu göstereyim.

Bunun doğru olmadığını varsayalım. Bu durumda  $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$  vardır öyle ki  $\mathcal{M} \notin \text{Lat}(B_1)$  ve  $\mathcal{N} \notin \text{Lat}(B_2)$  sağlanır. O halde

$$\mathcal{N} \in \text{Lat}(B_1) \quad \text{ve} \quad \mathcal{M} \in \text{Lat}(B_2)$$

olması gerekir. Buradan  $B := B_1 + B_2 \in \mathcal{L}$  için  $\mathcal{M}$  ve  $\mathcal{N}$  altuzayları  $B$ -invariant değildir. Bu bir çelişkidir.  $\square$

**Sonuç 4.3.**  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G}$  matrislerin iki komütatif kümesi ve  $\mathcal{G}$ , lineer uzay olsun. Eğer her  $A \in \mathcal{F}$  ve  $B \in \mathcal{G}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  ise  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  üçgenleştirilebilir.

*Kanıt.*  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G}$  için yapılan varsayımlar, bunların  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ -invariant altuzaylara kısıtlayarak ve bu uzaylara göre bölüm uzaylarını aldıktan sonra korunduğunu gözlemleyelim. Dolayısıyla, Önerme 4.2'den ve Üçgenleştirme Lemmasından [22, Lemma 1.1.4] sonucun ispatı elde edilir.  $\square$

Bizim bir sonraki hedefimiz Sonuç 4.3'ün benzerini matrislerin komütatif olmayan kümeleri için elde etmektir. Teorem 4.8'de bu ispatlanır, ve eğer söz konusu kümeler cebir ise durum özellikle ilginç olur.

**Lemma 4.4.**  $\mathcal{L}$  rankı bir veya sıfır olan matrislerin uzayı olsun. O halde  $\mathcal{L}$  uzayını sıfırdan farklı bütün elemanları ya ortak görüntüye ya da ortak çekirdeğe sahiptir.

Dikkat edilmelidir ki eğer  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  matris cebirleri (veya, daha genel olarak, lineer uzay) öyle ki her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  ise sabitlenmiş her bir  $A_0 \in \mathcal{A}$  ve  $B_0 \in \mathcal{B}$  için  $\{[A_0, B] | B \in \mathcal{B}\}$  ve  $\{[A, B_0] | A \in \mathcal{A}\}$  kümeleri rankı en fazla bir olan matris lineer uzayları olur. Böylece, Lemma 4.4 ile bu uzayların her biri ya ortak görüntüye ya da ortak çekirdeğe sahip olmak zorundadır. Bu aşağıdaki önermede gösterildiği üzere, çok özel invariant altuzayları elde etmek için kullanılabilir.

**Önerme 4.5.**  $\mathcal{A}$  bir matris cebiri ve  $B_0$  bir matris öyle ki  $\mathcal{L} = \{[A, B_0] | A \in \mathcal{A}\}$  kümesi rankı en fazla bir olan matrislerden meydana gelsin.  $\mathcal{L} \neq 0$  ve  $\mathcal{L}$  kümesinin sıfır olmayan elemanlarının ortak görüntüye sahip olduğu varsayalım. Bu görüntü bir  $y \in \mathbb{C}^n$  vektörü tarafından üretilsin. O halde  $y$  vektörü  $\mathcal{A}$  için ortak bir özvektördür.

*Kanıt.*  $A_0 \in \mathcal{A}$  ve  $x \in \mathbb{C}^n$  öyle ki  $[A_0, B_0]x = y \neq 0$  olsun. Genel olarak  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$  olduğundan her  $A \in \mathcal{A}$  için

$$[AA_0, B_0]x = A[A_0, B_0]x + [A, B_0]A_0x = Ay + [A, B_0]A_0x$$

sağlanır. Ayrıca  $[AA_0, B_0]x$  ve  $[A, B_0]A_0x$  vektörlerinin her ikisi  $y$  vektörünün bir katı olduğundan  $y$  vektörü her  $A \in \mathcal{A}$  için bir özvektör olur.  $\square$

**Not 4.6.**  $\mathcal{A}$  bir matris yarıgrubu olarak alınırsa Önerme 4.5'in sonucu geçerlidir. Yine de  $\mathcal{A}$  bir cebir olduğu zaman önermenin varsayımındaki  $\mathcal{L}$  uzayındaki bütün matrislerin ortak görüntüye sahip olma kısmı tek makul beklentidir, çünkü bu Önerme 4.5 öncesi yaptığımız yorumdan görülür.

**Lemma 4.7.**  $\mathcal{S}$  ve  $\mathcal{T}$  matris yarıgrupları olmak üzere

$$\mathcal{M} = \bigvee_{A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}} \text{Ran}([A, B]) \quad \text{ve} \quad \mathcal{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}} \text{Ker}([A, B])$$

olsun. O halde  $\mathcal{M}$  ve  $\mathcal{N}$  uzayları  $(\mathcal{S} \cup \mathcal{T})$ -invarianttır.

*Kanıt.*  $A \in \mathcal{S}$  ve  $B \in \mathcal{T}$  için  $y \in \text{Ran}([A, B])$  ise en az bir  $x \in \mathbb{C}^n$  için  $y = [A, B]x$  sağlanır.  $A_1 \in \mathcal{S}$  olsun. Genel olarak  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$  olduğundan

$$A_1y = A_1[A, B]x = [A_1A, B]x - [A_1, B]Ax \in \mathcal{M}$$

elde edilir. Buradan  $\mathcal{M} \in \text{Lat } \mathcal{S}$  olur. Benzer şekilde  $\mathcal{M} \in \text{Lat } \mathcal{T}$  bulunur.

Şimdi,  $y \in \mathcal{N}$  ise her  $A \in \mathcal{S}$  ve  $B \in \mathcal{T}$  için  $[A, B]y = 0$  eşitliği gerçekleşir. Tekrar  $A_1 \in \mathcal{S}$  alırsak

$$[A, B]A_1y = [AA_1, B]y - A[A_1, B]y = 0,$$

ve böylece  $\mathcal{N} \in \text{Lat } \mathcal{S}$  olur. Benzer biçimde  $\mathcal{N} \in \text{Lat } \mathcal{T}$  elde edilir.  $\square$

Bu bölümün ana sonucu aşağıdaki teoremdir ve bu Örnek 3.3 ile karşılaştırılması faydalıdır.

**Teorem 4.8.**  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  matris cebirleri öyle ki her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  olsun.  $[A, B]$  sıfırdan farklı olacak şekilde  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  var ise  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  bir ortak aşikar olmayan invariant altuzaya sahiptir.

*Kanıt.*  $A_0 \in \mathcal{A}$  ve  $B_0 \in \mathcal{B}$  öyle ki  $[A_0, B_0] \neq 0$  olsun. Lemma 4.4'ten  $\{[A, B_0] | A \in \mathcal{A}\}$  kümesindeki sıfırdan farklı matrisler ya ortak görüntüye ya da ortak çekirdeğe sahiptir.  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  ortak aşikar olmayan invariant altuzaya sahip ancak ve ancak  $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{B}^*$  de ortak aşikar olmayan invariant altuzaya sahip olması gerçeğini hatırlayalım, burada

$$\mathcal{A}^* = \{A^* | A \in \mathcal{A}\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{B}^* = \{B^* | B \in \mathcal{B}\}$$

olarak tanımlanır. Bu nedenle,  $\{[A, B_0] | A \in \mathcal{A}\}$  kümesindeki sıfırdan farklı matrislerin ortak görüntüye sahip olduklarını varsayabiliriz. Bu görüntüden sıfırdan farklı bir vektör seçelim ve bunu  $e_1$  ile gösterelim. Her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $e_1 \in \text{Ker}([A, B])$  olduğunu göstereceğiz. Bu ve Lemma 4.7 ispatı sonlandırarak.

Varsayalım ki  $[A, B]e_1 \neq 0$  olacak şekilde  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  matrisleri olsun.  $[A_0, B_0]$  komütatörünün izinin (trace) sıfır olduğunu gözlemleyelim ve ayrıca rank'ı bir olduğundan nilpotent olmak zorundadır. Bu nedenle  $e_1$  kümesini

$$[A_0, B_0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde  $e_1, \dots, e_n$  tabanına genişletebiliriz. Herhangi iki  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  için

$$[A + \alpha A_0, B + \beta B_0] = [A, B] + \alpha[A_0, B] + \beta[A, B_0] + \alpha\beta[A_0, B_0]$$

eşitliği sağlanır. Varsayımdan  $[A, B]$  matrisinin ilk sütunu sıfır değildir.  $\{[A, B_0] | A \in \mathcal{A}\}$  kümesindeki sıfırdan farklı matrislerin ortak görüntüsü  $e_1$  tarafından üretildiğinden kümedeki her matrisin yalnızca ilk satırı sıfır değildir. Hem de nilpotent olduklarından  $[A, B_0]$  ve  $[A_0, B_0]$  matrislerinin ilk sütunları sıfırdır.  $\{[A_0, B] | B \in \mathcal{B}\}$  kümesindeki sıfırdan farklı matrisler ya ortak görüntüye sahipler, ki bu durumda görüntü  $e_1$  tarafından üretilir (çünkü  $[A_0, B_0] \neq 0$  matrisinin görüntüsü  $e_1$  tarafından üretildi), ya da hepsi ortak çekirdeğe sahiptir. Bu nedenle yukarıda gibi aynı düşünceden  $[A_0, B]$  matrisinin ilk sütunu sıfırdır (ortak bir çekirdeğe sahip olduğunda durum  $e_1 \in \text{Ker}([A_0, B_0])$  gözleminden ortaya çıkar).

Özellikle her  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  için

$$[A, B] + \alpha[A_0, B] + \beta[A, B_0] + \alpha\beta[A_0, B_0] \quad (3.1)$$

matrisi rank-bir (yani, rankı bire eşit) olur, ve sütunlarının her biri ilk sütunun bir katıdır (zorunlu olarak sıfırdan farklı).

$\alpha = 1$  olarak alınsın. Yukarıdaki matriste ikinci sütun göz önüne alındığında onun ilk girdisi  $([A, B] + [A_0, B])$  matrisinin  $(1, 2)$ -girdisi artı  $\beta$  defa  $([A, B_0] + [A_0, B_0])$  matrisinin  $(1, 2)$ -girdisine eşittir.  $[A, B_0]$  ve  $[A_0, B_0]$  matrislerinin ikisinde de yalnızca



ilk satır sıfırdan farklı olduğundan (3.1) matrisinin ikinci sütunundaki diğer her girdi  $[A, B]$  ve  $[A_0, B]$  matrislerinde karşılık gelen girdilerin toplamıdır. Her  $\beta \in \mathbb{C}$  için

$$[A, B] + [A_0, B] + \beta[A, B_0] + \beta[A_0, B_0]$$

matrisi rank-bir olduğundan  $[A, B]$  matrisinin birinci sütunundaki ilk girdi dışındakilerin hepsi sıfırdır ya da  $[A, B_0]$  ve  $[A_0, B_0]$  matrislerinin (1, 2)-girdilerinin toplamı sıfırdır.

Eğer  $[A, B]$  matrisinin ilk sütunundaki sıfırdan farklı tek mümkün girdi (1, 1)-girdisi ise,  $[A, B]$  matrisinin ilk satırı dışındaki tüm girdileri sıfırdır. Aynı zamanda nilpotent olduğundan  $[A, B]$  matrisinin (1, 1)-girdisi sıfır olmak zorundadır, bu da  $[A, B]$  matrisinin ilk sütununun sıfır olmasını gerektirir. Bu ise  $A$  ve  $B$  matrislerinin seçiminden dolayı imkansızdır. Buradan

$$([A, B_0])_{12} = -([A_0, B_0])_{12}$$

olur.  $\alpha = 2$  alınarak aynı düşünceyle

$$([A, B_0])_{12} = -2([A_0, B_0])_{12}$$

bulunur.  $[A_0, B_0]$  matrisinin (1, 2)-girdisi sıfır olmadığından çelişki elde edilir.  $\square$

Teorem 4.8'in koşullarının ne kadar zayıflatılabileceği çok doğal bir soru olarak ortaya çıkmaktadır. Aşağıdaki basit örnek koşullardaki cebirlerin yarıgruplar ile değiştirilemeyeceğini göstermektedir.

**Örnek 4.9.**  $E_{ij}$  ile  $(i, j)$ -matris birimi (yani,  $(i, j)$ -girdisi 1, geri kalan tüm girdilerin 0 olduğu matris) gösterilsin.  $S_1$  ve  $S_2$  yarıgrupları aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$S_1 = \{E_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{0\} \quad \text{ve} \quad S_2 = \{E_{11}\}.$$

Kolayca görülür ki her  $A \in S_1$  ve  $B \in S_2$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  ve rank-bire ulaşılır. Fakat  $S_1 \cup S_2$ , ortak invaryant altuzaya sahip değildir, çünkü  $S_1$  zaten indirgenemezdir.

Teorem 4.8'deki cebirlerin matris lineer uzayları ile değiştirilip değiştirilemeyeceği çok açık değildir. Şunu hatırlayalım: Burnside Teoreminin matris uzayları için bir versiyonu yoktur, ve  $M_n(\mathbb{C})$  cebiri aşık olmayan invaryant altuzaysız birçok öz altuzay içerir. Toeplitz matrisleri uzayı böyle bir altuzaya örnektir. Daha doğrusu ortak invaryant altuzaya sahip olmayan uzaylar bilinen epey "zayıf" örneklerdir. Örneğin

[16, Örnek 2]'de  $n \times n$  boyutlu nilpotent matrislerin  $(n - 1)$  boyutlu uzayı invaryant altuzaylara sahip olmayacak şekilde inşa edilmiştir. Bundan sonra birkaç önermede matris uzaylarında rank-bir komütatörler ile ilgili bazı kısmi sonuçlar kurulacaktır, ek olarak bir kısmi sonuç zaten Önerme 4.2'de verilmiştir.

**Lemma 4.10.**  $\mathcal{L}$  bir matris uzayı ve  $B$  bir matris öyle ki her  $A \in \mathcal{L}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  olsun. O halde

$$\mathcal{M} = \bigvee_{A \in \mathcal{L}} \text{Ran}(A) \quad \text{veya} \quad \mathcal{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{L}} \text{Ker}(A)$$

uzaylarından biri  $B$  altında invaryanttır.

*Kanıt.* Her  $A \in \mathcal{L}$  için  $[A, B]$  komütatörü  $C_A$  ile gösterilsin. Açık olarak  $C = \{C_A | A \in \mathcal{L}\}$  kümesi bir lineer uzay oluşturur. Lemma 4.4 ile  $C$  uzayını sıfırdan farklı elemanları ya hepsi ortak görüntüye ya da ortak çekirdeğe sahiptir. Eğer gerekli ise  $\mathcal{L}$  ve  $B$ 'ye eşlenik (conjugation) uygulayarak,  $C$  uzayındaki bütün sıfırdan farklı elemanların ortak görüntüye sahip olduğunu varsayabiliriz [Teorem 2.18].  $y \in \mathbb{C}^n$  bir vektör olsun öyle ki her bir  $A \in \mathcal{L}$  için  $C_A = yz_A^*$  yazılabilecek şekilde en az bir  $z_A \in \mathbb{C}^n$  bulunur.

$\mathcal{M}$  veya  $\mathcal{N}$  uzaylarının  $B$ -invaryant olduğunu göstermemiz gerekir.  $\mathcal{N}$  uzayının  $B$ -invaryant olmadığını varsayalım. O zaman  $Bx_0 \notin \mathcal{N}$  olacak şekilde bir  $x_0 \in \mathcal{N}$  vardır. Dolayısıyla,  $\mathcal{N}$  uzayının tanımından bir  $A_0 \in \mathcal{L}$  vardır öyle ki  $A_0 Bx_0 \neq 0$  olur.

$C_{A_0}x_0 = yz_{A_0}^*x_0$  yazılsın, ve  $z_{A_0}^*x_0$  sayısı  $\alpha$  ile gösterilsin. O halde

$$\alpha y = A_0 Bx_0 - BA_0 x_0 = A_0 Bx_0 \neq 0$$

olur. Buradan  $\alpha \neq 0$  olduğu ortaya çıkar, böylece  $y = \frac{1}{\alpha} A_0 Bx_0$  bulunur. Özel olarak  $y \in \mathcal{M}$  sonucuna ulaşılır.

Şimdi keyfi bir  $z \in \mathbb{C}^n$  alınsın. O zaman her  $A \in \mathcal{L}$  için  $\gamma$  bir skaler olmak üzere

$$BAz = (BA - AB)z + ABz = -C_A z + ABz = \gamma y + ABz$$

eşitliği sağlanır. Buradan  $BAz \in \mathcal{M}$  sonucu çıkar. Bu sonuç tüm  $A \in \mathcal{L}$  için geçerli olduğundan  $B\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$  olur.  $\square$

**Sonuç 4.11.**  $\mathcal{A}$  sıfırdan farklı bir eleman içermek üzere nilpotent matrislerin cebiri, ve  $\mathcal{L}$  bir matris uzayı öyle ki her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{B}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{A} \cup \mathcal{L}$  bir invaryant altuzaya sahiptir.

*Kanıt.* Aşağıdaki alt uzayları tanımlayalım:

$$\mathcal{M} = \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \text{Ran}(A) \quad \text{ve} \quad \mathcal{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \text{Ker}(A).$$

$\mathcal{A}$  cebir olduğundan  $\mathcal{M}$  ve  $\mathcal{N}$  uzayları  $\mathcal{A}$ -invarianttır. Levitzki'nin teoremiyle (bakınız [13] veya [22, Teorem 2.1.7])  $\mathcal{A}$  cebirinin üçgenleştirilebilir olduğunu not edelim.  $\mathcal{A}$  cebirini üçgenleştiren bu tabanda  $\mathcal{A}$  cebirindeki tüm matrisler bir ortak sıfır sütuna ve bir ortak sıfır satıra sahiptir. Buna göre  $\mathcal{M}$  ve  $\mathcal{N}$  uzayları aşıkardır.

Lemma 4.10 yardımıyla  $B \in \mathcal{L}$  ise ya  $\mathcal{M}$  uzayı ya da  $\mathcal{N}$  uzayı  $B$ -invarianttır.  $\mathcal{M}$  veya  $\mathcal{N}$  uzaylarından biri  $\mathcal{L}$ -invariant olduğunu iddia ediyoruz. İspat, Önerme 3.3'dekiyle aynıdır. Bu iddianın doğru olmadığını varsayalım. O zaman  $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$  vardır öyle ki  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{B}_1$ -invariant değil ve  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{B}_2$ -invariant değildir. Bu durumda  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{B}_2$ -invariant ve  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{B}_1$ -invariant olmalıdır. Öte yandan  $B = B_1 + B_2 \in \mathcal{L}$  olur, fakat  $\mathcal{M}$  ve  $\mathcal{N}$ ,  $B$ -invariant değildir. Bu bir çelişkidir.  $\square$

**Önerme 4.12.**  $\mathcal{L} \subseteq M_n(\mathbb{C})$  matris lineer uzayı ve  $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{C})$  bir yarı-basit skaler olmayan cebir olsun. Eğer her  $A \in \mathcal{A}$  ve  $B \in \mathcal{L}$  için  $\text{rank}[A, B] \leq 1$  ise  $\mathcal{L}$  bir invaryant altuzaya sahiptir. Eğer  $[A, B]$  her zaman sıfır değil ise  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{L}$  ortak bir invaryant altuzaya sahiptir.

*Kanıt.*  $\mathcal{A}$  yarı-basit olduğundan bir  $C^*$ -cebirine benzerdir ([14, Sonuç 24]). Benzerliğin uygulandığını varsayacağız.  $C^*$ -cebirleri teoresinden ([5]) matrislerin  $C^*$ -cebiri düzgün katlılık (uniform multiplicity)  $C^*$ -cebirlerinin  $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_k$  direkt toplamına birimcil olarak denktir (unitarily equivalent) ve her bir  $\mathcal{A}_j$  bir tam matris cebirinin bir genişlemesidir.

$\mathcal{A}$  yarı-basit cebirinin skaler olmadığı varsayıldığından kendine-eş cebirlerin standart teorisiyle bir skaler olmayan (kendine-eş) projeksiyon  $E \in \mathcal{A}$  vardır. Önerme 4.2'den  $\text{Ran}(E)$  uzayı ya da  $\text{Ker}(E)$  uzayı  $\mathcal{L}$ -invarianttır. Bu Önermenin ilk kısmını ispatlar.

Şimdi,  $k \geq 2$  ise  $E$  projeksiyonu  $I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0$  olarak seçilerek  $\mathcal{A}$  ile değişmeli

yapılabilir. Bu nedenle  $\text{Ran}(E)$  ve  $\text{Ker}(E)$  uzayları  $\mathcal{A}$ -invarianttır, ve ortak bir  $\mathcal{A} \cup \mathcal{L}$ -invariant altuzay elde edilir.

Burada  $\mathcal{A} = M_k(\mathbb{C})^{(m)}$  bir tam matris cebirinin genişlemesi olduğu zaman ayrı olarak incelenmesi gereken tek durumdur. Eğer komütatörler her zaman sıfır değil ise bu durum gerçekleşemeyeceğini iddia ediyoruz. İlk olarak aşağıdaki yardımcı sonucu kuralım.

**İddia 4.13.** Her  $Y \in M_k(\mathbb{C})$  için  $\text{rank}[X, Y] \leq 1$  olacak şekilde bir  $X \in M_k(\mathbb{C})$  varsa  $X$  birimin katıdır.

*Kanıt.* İlk olarak  $X$  matrisini Jordan bloklarının  $J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_p$  direkt toplamı şeklinde yazalım. Yukarıdaki rank koşulu her  $J_i$  matrisinin birimin bir katı olmasını gerektirir. Buradan  $X = c_1 I_{k_1} \oplus \dots \oplus c_p I_{k_p}$  biçiminde olduğu bulunur.  $i$ . ve  $j$ . blokları permüte eden  $Y$  permütasyon matrisleriyle komütatörü göz önüne alırsak, her  $i$  ve  $j$  için  $c_i = c_j$  sonucu çıkar. Bu ise iddiamızı ispatlar.  $\square$

Şimdi keyfi bir  $A_0 \in \mathcal{A} \subset M_k(\mathbb{C})^{(m)}$  elemanı sabit bir  $A \in M_k(\mathbb{C})$  matrisinin  $m$  tane kopyasının direkt toplamı şeklinde yazılabilir yani,  $A_0 = A \oplus A \oplus \dots \oplus A$ .  $\mathcal{L}$  uzayının keyfi bir  $T$  elemanı seçilsin ve bir  $m \times m$  boyutlu blok matris  $T = [T_{ij}]$  olarak yazılsın. Komütatör  $[T, A_0]$  girdileri komütatör olan bir matristir:

$$[T, A_0] = [[T_{ij}, A]].$$

İddia 4.13'den her bir  $T_{ij}$  matrisi birimin katıdır, ve bundan dolayı  $T$  skaler bloklara sahip olan blok matristir. Bu nedenle her  $A_0 \in \mathcal{A}$  için  $[T, A_0] = 0$  olur.  $\square$

# KAYNAKÇA

- [1] J.S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 2nd ed., Springer-Verlag, (1997).
- [2] W. Burnside, *On the condition of reducibility of any group of linear substitutions*, Proc. London Math. Soc. **2-3**, no. 1, 430.
- [3] M.D. Choi & H. Radjavi, *On commutators and invariant subspaces*, linear and Multilinear Algebra **9**(1980/81), no. 4, 329-340.
- [4] G. Cigler & R. Drnovšek & D. Kokol-Bukovšek & M. Omladič & Th.J. Laffey & H. Radjavi & P. Rosenthal, *Invariant subspaces for semigroups of algebraic operators*, J. Funct. Anal. **160**(1998), no. 2, 452-465.
- [5] K.R. Davidson,  *$\mathbb{C}^*$ -algebras by Example*, Fields Institute Monographs, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [6] R. Drnovšek, *Hyperinvariant subspaces for operator semigroups with commutators of rank at most one*, Houston J. Math **26**(2000), no. 3, 543-548.
- [7] R. Drnovšek, *Invariant subspaces for operator semigroup with commutators of rank at most one*, J. Funct. Anal. **256**(2009), no. 12, 4187-4196.
- [8] R.M. Guralnick, *Triangularization of sets of matrices*, Linear and Multilinear Algebra **9**(1980), no. 2, 133-140.
- [9] K. Hoffmann & R. Kunze, *Linear Algebra*, 2nd ed., PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, Library of Congress Catalog Card No. 75142120, 1971.
- [10] A. Jafarian & A.I. Popov & M. Radjabalipour & H. Radjavi, *Commutators of small rank and reducibility of operator semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **142**(2014), no. 12, 4277-4289.

- [11] A. Jafarian & A. I. Popov & H. Radjavi, *Common Invariant Subspaces from Small Commutators*, Indian University **67**(2008), no. 1, 151-167.
- [12] Th.J. Laffey, *Simultaneous of matrices—low rank cases and the nonderogatory case*, Linear and Multilinear Algebra **6**(1978/79), no. 4, 269-305.
- [13] J. Levitzki, *Über nilpotente Unterringe*, Math. Ann. **105**(1931), no. 1, 620-627(Almanca).
- [14] L. Livshits & G.W. Macdonald & L.W. Marcoux & H. Radjavi, *A spatial version of Wedderburn's principal theorem*, Linear and Multilinear Algebra **63**(2015), no. 6, 1216-1241.
- [15] V. Lomonosov & P. Rosenthal, *The simplest proof of Burnside's theorem on matrix algebras*, Linear Algebra Appl. **383**(2004), 45-47.
- [16] B. Mathes & M. Omladič & H. Radjavi, *Linear spaces of nilpotent matrices*, Linear Algebra Appl. **149**(1991), 215-225.
- [17] N.Hm Moccoy, *On the characteristic roots of matrix polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**(1936), 592-600.
- [18] M. Omladič & H. Radjavi, *Nilpotent commutators and reducibility of semigroups*, Linear and Multilinear Algebra **57**(2009), no. 3, 307-317.
- [19] M. Omladič & H. Radjavi, *Reducibility of semigroups and nilpotent commutators with idempotents of rank two*, Ars Math. Comtemp. **3**(2010), no. 1, 99-108.
- [20] M. Omladič & H. Radjavi, *Self-adjoint semigroups with nilpotent commutators*, Linear Algebra Appl. **436**(2012), no. 7, 2597-2603.
- [21] H. Radjavi & P. Rosenthal, *From local to global triangularization*, J. Funct. Anal. **147**(1997), no. 2, 443-456.
- [22] H. Radjavi & P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [23] H. Radjavi & P. Rosenthal, *On commutators of idempotents*, Linear and Multilinear Algebra **50**(2002), no. 2, 121-124.

- [24] H. Radjavi & P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, 2nd ed. , Dover Publications, Inc. , Mineola, NY,2003.
- [25] G.Szep, *Simultaneous triangularization of projector matrices*, Acta Math. Hungar. **48**(1989), no. 3-4, 285-288.

